



Equations différentielles stochastiques
Notes de cours
Filière 4

Thierry Chonavel
thierry.chonavel@telecom-bretagne.eu

Septembre 2011



Table des matières

1	Introduction	4
2	Rappels et compléments de probabilités	6
2.1	Tribus	6
2.2	Processus aléatoires et espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$	7
2.3	Mouvement brownien	8
2.3.1	Mouvement brownien	8
2.3.2	Constructions du mouvement brownien	10
2.4	Martingales	13
2.4.1	Filtrations	13
2.4.2	Martingale	13
2.4.3	Inégalité de Doob	14
3	L'intégrale d'Itô	15
3.1	Position du problème	15
3.2	Construction de l'intégrale d'Itô	16
3.2.1	Fonctions élémentaires	16
3.2.2	Espace $\mathcal{V}([a, b])$	17
3.2.3	Représentation des martingales	19

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
3.3 Exemple	19
4 Intégration des EDS.	21
4.1 Formule d'Itô	21
4.1.1 Exemples	22
4.1.2 Formule d'Itô vectorielle	22
4.2 Intégration des EDS	23
4.2.1 Exemples	23
4.2.2 Existence de solutions	24
5 Intégration numérique des EDS	26
5.1 Rappels sur l'intégration numérique des EDO	26
5.2 Intégration numérique des EDS par la méthode d'Euler	27
5.2.1 Méthode d'Euler	27
5.2.2 Interpolation des solutions discrètes	27
5.2.3 Ordre	28
5.3 Intégration numérique des EDS par la méthode de Milstein	28
5.4 Méthodes d'ordre supérieur à un	29
5.4.1 Formules de Taylor	29
5.4.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 1,5	30
5.5 Exemples	30
6 Exercices	33
7 Travaux pratiques	35
A Mesures aléatoires	36

TABLE DES MATIÈRES

3

A.1	Définition	36
A.2	Mesure positive μ_Z associée à Z	36
A.2.1	Intégrale stochastique $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)Z(dt)$	37
A.3	Prolongement par continuité d'un opérateur linéaire [10].	38

Chapitre 1

Introduction

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, présence de bruit d'observation, Dans ces situations, les approches probabilistes trouvent naturellement leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Cependant, l'introduction de ces termes aléatoires conduit à une intégration des équations qui ne correspond pas, en général, à une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.

L'objectif de ces notes de cours est d'introduire le **calcul d'Itô** qui permet d'aborder les équations différentielles stochastiques. On commencera par quelques rappels et compléments de théorie des probabilités (chapitre II) qui seront utiles pour cela. Après avoir présenté quelques résultats importants relatifs au calcul d'Itô, on verra (chapitre III) comment il peut être mis en oeuvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques (EDS). Comme pour les équations différentielles classiques, on ne sait pas en général intégrer de manière exacte les EDS. Aussi, on présentera (chapitre IV) quelques techniques permettant d'obtenir des approximations numériques des trajectoires des EDS.

Ces notes de cours s'appuient essentiellement sur le livre de de Bernt Oksendal intitulé *Stochastic differential equations* [9] qui constitue une excellente référence pédagogique pour l'enseignement des EDS et sur la référence [6] pour ce qui concerne plus particulièrement la résolution numérique des EDS. D'autres références sont également fournies dans la bibliographie.

Remarques

- Ces notes ont été rédigées avec \LaTeX ¹ et les simulations réalisées avec le langage Python².
- La figure en bas de page de garde représente une trajectoire d'une marche aléatoire sur la sphère.

1. <http://fr.wikipedia.org/wiki/LaTeX>

2. [http://fr.wikipedia.org/wiki/Python_\(langage\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Python_(langage))

Notations et Abréviations

$ \mathbf{M} $	déterminant de la matrice M
$\mathbf{v}^T, \mathbf{M}^T$	transposé d'un vecteur, d'une matrice
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	produit scalaire de \mathbf{x} et de \mathbf{y}
$Tr(\mathbf{M})$	trace d'une matrice
$sign(a)$	$sign(x) = +1, -1, 0$, selon que a est positif, négatif, nul
$\delta_{a,b}$	$\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$, et 0 sinon (symbole de Kronecker)
$[\mathbf{v}]_i, [\mathbf{M}]_{ij}$	élément d'indices i , ou (i, j) , d'un vecteur ou d'une matrice
$\ \mathbf{M}\ $	norme de \mathbf{M} (la norme choisie est définie par le contexte)
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	ensembles des nombres entiers, entiers relatifs, réels, et complexes
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	tribu borélienne de \mathbb{R}^n
$B = (B_t)_{t \geq 0}$	mouvement brownien standard
$\mathbb{1}_A$	fonction indicatrice de l'ensemble A
c.à.d.	c'est à dire
p.s.	presque sûrement
IID	indépendantes et identiquement distribuées

Chapitre 2

Rappels et compléments de probabilités

On suppose connues les bases de probabilités et la notion de processus stochastiques. Les étudiants sont invités à relire les notes de cours d'introduction aux probabilités et aux processus aléatoires. Les variables aléatoires seront considérées ici sur un espace probabilisé noté (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, où $\mathcal{B}(\cdot)$ représente la **tribu borélienne**. Le mouvement brownien qui joue un rôle central en calcul stochastique sera présenté dans ce chapitre.

2.1 Tribus

Rappelons maintenant quelques notions importantes sur les tribus.

Notons tout d'abord que la tribu borélienne d'un espace topologique est la tribu engendrée par la topologie (les ouverts) de cet ensemble, la **tribu engendrée** par un ensemble de sous-ensembles de Ω étant la plus petite tribu contenant ces sous-ensembles, c.à.d. l'intersection des tribus qui contiennent tous ces sous-ensembles.

La tribu engendrée par une variable aléatoire est définie comme la tribu engendrée par les images réciproques des éléments de la tribu de l'ensemble d'arrivée de la variable. En fait, on peut vérifier que l'ensemble de ces images réciproques constitue en lui même une tribu.

Espérance conditionnelle Pour une variable aléatoire X de (Ω, \mathcal{A}, P) et une sous-tribu de \mathcal{A} notée \mathcal{B} , $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ représente la variable aléatoire (unique) \mathcal{B} -mesurable telle que

$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]dP = \int_B XdP \quad (2.1)$$

pour tout élément B de \mathcal{B} .

En Notant $\sigma(X)$ la tribu engendrée par la variable aléatoire X , on peut démontrer qu'une variable aléatoire Y est mesurable pour la tribu $\sigma(X)$, c'est à dire que les images réciproques par Y des éléments de la tribu de l'espace d'arrivée sont dans $\sigma(X)$, si et seulement si il existe une fonction mesurable g telle que $Y = g(X)$ ([5] p.8). Plus généralement, on notera $\sigma(\{X_i\}_{i \in I})$ la tribu engendrée par les variables aléatoires de $\{X_i\}_{i \in I}$. On définira l'espérance d'une variable aléatoire X conditionnellement aux variables $\{X_i\}_{i \in I}$ et on notera $\mathbb{E}[X|\{X_i\}_{i \in I}]$ l'espérance conditionnelle de X conditionnellement à la tribu $\sigma(\{X_i\}_{i \in I})$. Compte tenu de ce qui précède, on voit que $\mathbb{E}[X|\sigma(\{X_i\}_{i \in I})]$ peut s'écrire comme une fonction des variables $\{X_i\}_{i \in I}$.

2.2 Processus aléatoires et espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Les processus aléatoires considérés ici seront de la forme $X = (X_t)_{t \in T}$, avec en général $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = \mathbb{N}$ pour le cas scalaire et $T = \mathbb{R}_+^n$ ou $T = \mathbb{N}^n$ pour le cas vectoriel. Rappelons que la loi du processus X est entièrement caractérisée par l'ensemble des lois des vecteurs de la forme $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_k \in T$.

Le **théorème de Kolmogorov** permet de préciser dans quelles conditions pour un ensemble de lois de probabilités $P_{(t_1, \dots, t_k)}$, définies pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_k \in T$ il existe un processus aléatoire $X = (X_t)_{t \in T}$ dont la loi est caractérisée par ces probabilités :

Définition Une famille $(P_I)_{I \in \Pi(T)}$ de lois de probabilité est dite **cohérente** ou consistante¹, si pour tout élément I de $\Pi(T)$ et toute permutation $\sigma(I)$ de I ,

$$dP_{\sigma(I)}((x_i)_{i \in \sigma(I)}) = dP_I((x_i)_{i \in I}), \quad (2.2)$$

et si pour tous I et J de $\Pi(T)$, avec $J \subset I$, la restriction de la loi P_I à J est égale à P_J :

$$\int_{(x_i)_{i \in I-J}} dP_I((x_i)_{i \in I}) = dP_J((x_i)_{i \in J}). \quad (2.3)$$

On peut maintenant énoncer le théorème suivant, de cohérence (ou de consistance) de Kolmogorov, qui précise l'existence d'un processus de lois finies données :

Théorème 1 (de cohérence de Kolmogorov) *Soit T un ensemble d'indices, et une famille $(P_I)_{I \in \Pi(T)}$ de lois définies sur les espaces probabilisables $(E, \mathcal{E})^I$ correspondants. Alors, on peut définir un processus $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$ tel que la famille $(P_I)_{I \in \Pi(T)}$ caractérise la loi de ce processus si et seulement si la famille $(P_I)_{I \in \Pi(T)}$ est cohérente. La loi de $X = (X_t)_{t \in T}$ est alors définie de façon unique.*

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Rappelons que l'espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathcal{A}, dP)$ des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et de variance finie est un espace de Hilbert : c'est un espace vectoriel normé complet pour le produit scalaire défini par $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY^*]$ (on notera $\|X\| = \langle X, X \rangle^{1/2}$ la norme correspondante). $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est donc un espace de

1. mais il s'agit à mon sens d'une traduction un peu rapide de l'anglais *consistent*.

Hilbert, ce qui lui confère des propriétés importantes. En particulier, on peut mettre en oeuvre le théorème de projection qui permet de représenter des problèmes comme celui de la régression linéaire comme un problème de géométrie euclidienne. Ainsi, dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la définition de l'espérance conditionnelle (2.1) prend la forme suivante : $\mathbb{E}[X|Y]$ est la variable de la forme $h(Y) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour toute variable de la forme $g(Y) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on ait $\int g(y)h(y)dP_{XY}(x, y) = \int g(y)xdP_{XY}(x, y)$, soit $\mathbb{E}[g(Y)(\mathbb{E}[X|Y] - X)] = 0$.

2.3 Mouvement brownien

Commençons par rappeler le résultat suivant concernant le calcul de l'espérance conditionnelle dans le cas gaussien et qui se ramène dans ce cas précis à une régression linéaire.

Théorème 2 (conditionnement gaussien) *Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires vectorielles réelles conjointement gaussien et notons $m_X, m_Y, \Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_{XY}$ les moyennes, covariances et inter-covariance de ces vecteurs. Alors,*

$$\mathbb{E}[X|Y] = m_X + \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(Y - m_Y), \quad (2.4)$$

et la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est de la forme

$$\mathcal{N}(m_X + \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(y - m_Y), \Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{XY}^T). \quad (2.5)$$

Preuve Notons $Z = X - m_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(Y - m_Y)$. On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iu^T X}|Y = y] &= \mathbb{E}[e^{iu^T Z}|Y] \exp[iu^T(m_X + \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(y - m_Y))] \\ &= \exp[iu^T(m_X + \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}(y - m_Y)) - \frac{1}{2}u^T(\Gamma_X - \Gamma_{XY}\Gamma_Y^{-1}\Gamma_{XY}^T)u], \end{aligned} \quad (2.6)$$

qui est la fonction caractéristique d'une gaussienne dont il suffit d'identifier la moyenne et la covariance. Donc la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ prend bien la forme indiquée, ainsi que $\mathbb{E}[X|Y = y]$ qui correspond à la moyenne de la loi conditionnelle. \square

Ex. Vérifier les équations (2.6).

2.3.1 Mouvement brownien

Définition On dit qu'un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles est un **mouvement brownien** (ou **processus de Wiener**) issu de x si $X_0 = x$ et les accroissements de X sont gaussiens, centrés, stationnaires, et indépendants : c'est à dire que pour $0 \leq t_i \leq t_j \leq t_k \leq t_l$, $X_{t_j} - X_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t_j - t_i))$ et $\mathbb{E}[(X_{t_j} - X_{t_i})(X_{t_l} - X_{t_k})] = 0$. Dans la suite on considérera, sauf indication contraire, des mouvements browniens **standard** pour lesquels $x = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

On pourra vérifier à titre d'exercice qu'avec la définition précédente, la loi de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est de la forme $\mathcal{N}(0, \mathbf{C})$ où \mathbf{C} est une matrice $n \times n$ de terme général $[\mathbf{C}]_{ij} = \min(t_i, t_j)$. Avec cette

structure des probabilités des vecteurs finis de variables de X , on vérifie au moyen du théorème de cohérence de Kolmogorov, que la donnée de cette famille de lois finies caractérise bien la loi d'un processus aléatoire.

On peut montrer qu'avec la définition précédente on peut considérer des mouvements browniens dont les trajectoires sont continues. Pour préciser cette idée, on introduit la notion de **modification d'un processus** :

Définition On dit que le processus Y est une **modification** du processus X si

$$\forall t \in T, \quad P(\{\omega; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1. \quad (2.7)$$

Le théorème suivant, dit de continuité de Kolmogorov, indique une condition suffisante pour qu'il existe une modification continue d'un processus aléatoire :

Théorème 3 (de continuité de Kolmogorov) *Etant donné $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique, s'il existe des constantes positives α, β et C telles que*

$$\forall t > 0 \forall t_1, t_2 \in [0, t], \quad \mathbb{E}[|X_{t_2} - X_{t_1}|^\alpha] \leq C|t_2 - t_1|^\beta \quad (2.8)$$

alors le processus X admet une modification continue.

Ex. Montrer que le mouvement brownien admet une modification continue. (Indication : rappelons que si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^4$)

Dans la suite, on considérera des modifications continues du mouvement brownien. Notons également qu'on pourra facilement construire des mouvements browniens vectoriels dont les composantes sont des mouvements browniens indépendants. Les mouvements browniens seront notés sous la forme $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

La figure 2.1 suivantes illustre quelques réalisations d'un mouvement brownien en dimension 1 (en fonction du temps). Les figures suivantes présentent des réalisations d'un mouvement brownien en dimensions 2, et 3 (figure 2.2).

Ex. Montrer que si $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = \frac{1}{t}B_{1/t}$ pour $t \in]0, 1]$ est un mouvement brownien sur $[0, 1]$.

Pour comprendre l'origine du mouvement brownien qui provient de la description du mouvement d'une particule soumise à des chocs aléatoires, on peut montrer que les seuls processus à accroissements orthogonaux et stationnaires dont les trajectoires sont continues sont gaussiens. De plus, si les accroissements sont centrés on obtient un mouvement brownien. En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 4 *Les seuls processus à accroissements orthogonaux et stationnaires dont les trajectoires sont continues vérifient $X_t \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[X_0] + mt, \sigma^2 t)$. En particulier, si les accroissements sont centrés, $m = 0$ et X est un mouvement brownien.*

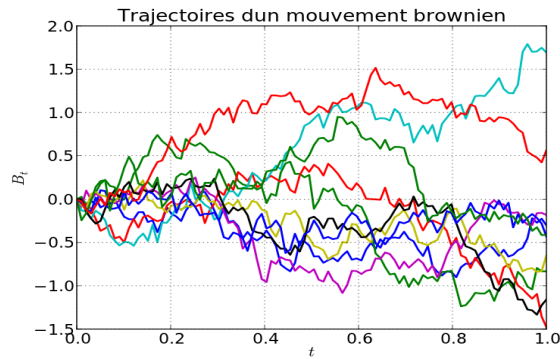


FIGURE 2.1 – Trajectoires d’un mouvement brownien.

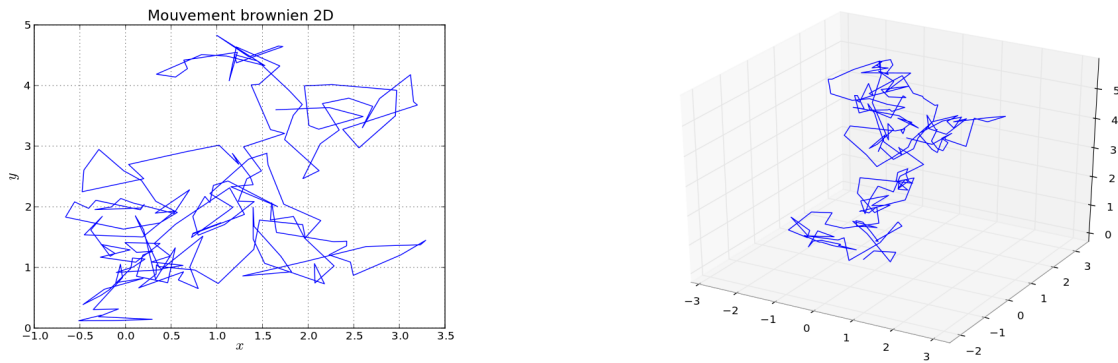


FIGURE 2.2 – Trajectoires d’un mouvement brownien 2D (à gauche) et 3D (à droite).

2.3.2 Constructions du mouvement brownien

Pont brownien

Lorsqu’on observe la réalisation d’un mouvement brownien, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ discrétisée il peut être utile de compléter cette trajectoire entre les points de l’échantillonnage. La notion de pont Brownien répond à cette question.

Supposons que $B = (B_t)_{t \geq 0}$ ait été échantillonné en $t_1 < \dots < t_n$ et cherchons à décrire la loi de $B_t | (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. Supposons que $t \in [t_i, t_{i+1}]$. On peut déjà noter que

$$\text{si } t_j \notin [t_i, t_{i+1}], \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), P(B_t \in A | B_{t_i}, B_{t_{i+1}}, B_{t_j}) = P(B_t \in A | B_{t_i}, B_{t_{i+1}}). \quad (2.9)$$

Ex. Vérifier la relation précédente.

On peut alors montrer, en utilisant le théorème 2 relatif au conditionnement gaussien et la propriété donnée par la relation (2.9) pour le conditionnement brownien, que $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$B_t | (B_{t_i} = b_i, B_{t_{i+1}} = b_{i+1}) \sim \mathcal{N} \left(\frac{b_i(t_{i+1} - t) + b_{i+1}(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \frac{(t_{i+1} - t)(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right). \quad (2.10)$$

En particulier, pour $t = (t_{i+1} + t_i)/2$ on obtient la méthode de construction du mouvement

brownien proposée par Paul Lévy en 1939 (méthode dite du point milieu).

Ex. Vérifier la relation (2.10)

La figure 2.3.2, montre un exemple de diverses trajectoires alternatives possibles pour divers intervalles d'une trajectoire d'un mouvement brownien. les trajectoires alternatives sont des réalisations du pont brownien sur les intervalles correspondants.

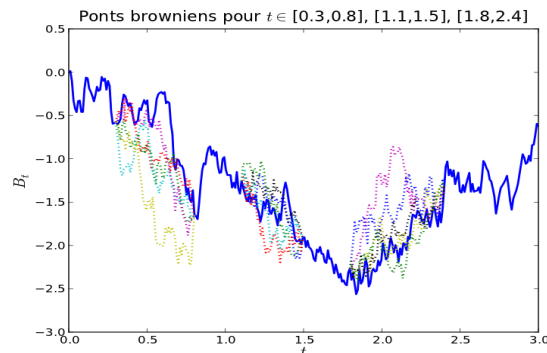


FIGURE 2.3 – Trajectoires de ponts browniens sur les intervalles $[0.3, 0.8]$, $[1.1, 1.5]$ et $[1.8, 2.4]$.

Théorème de Donsker

On a vu qu'on peut interpoler un mouvement brownien entre deux points au moyen d'un pont brownien. Notons que la valeur moyenne du pont brownien entre B_t et B_{t+h} est donnée par $\theta B_t + (1 - \theta)B_{t+h}$ en $t + \theta h$, pour $\theta \in [0, 1]$. Il en résulte qu'il peut sembler raisonnable de considérer une interpolation linéaire pour construire une trajectoire continue d'un mouvement brownien à partir d'une trajectoire échantillonnée. En fait, le théorème suivant fournit une méthode de construction des mouvements browniens qui justifie cette démarche d'interpolation linéaire.

Théorème 5 (de Donsker) Si V_1, V_2, \dots définit une suite IID de variables aléatoires centrées et réduites ($\mathbb{E}[V_k] = 0$ et $\mathbb{E}[V_k^2] = 1$) alors la suite de processus $(X_n)_{n \geq 1}$ à trajectoires continues définis par

$$X_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} V_k + (nt - [nt])V_{[nt]+1} \right) \quad (2.11)$$

où $[\cdot]$ représente la partie entière, converge en loi vers un mouvement brownien standard.

preuve Voir par exemple [1] p.68.

Remarques

i) Dans le théorème de Donsker les variables V_k n'ont pas besoin d'être gaussiennes. C'est le théorème de la limite centrale qui assure la gaussianité du processus limite.

ii) Il n'est pas nécessaire de linéariser les trajectoires pour avoir des trajectoires limites continues. Ainsi, si on considère la marche aléatoire $X^{(\delta, \epsilon)}$ avec $X_0 = 0$ qui change de valeurs aux instants $k\delta$, avec les variables $V_n = X_{k\delta}^{(\delta, \epsilon)} - X_{(k-1)\delta}^{(\delta, \epsilon)}$ indépendantes, centrées et de variance ϵ^2 , on voit que pour $n = \lfloor t/\delta \rfloor$ on a

$$\text{var}[X_t] = n\epsilon^2 = t \frac{\epsilon^2}{\delta} \quad (2.12)$$

car $X_t^{(\delta, \epsilon)} = \sum_{n=1}^{\lfloor t/\delta \rfloor} V_n$. Il apparaît donc que pour obtenir une limite finie et non nulle de $\text{var}[X_t]$ lorsque δ tend vers 0 il faut choisir ϵ de la forme $\epsilon = \sigma\sqrt{\delta}$. On a alors la convergence de $X_t^{(\delta, \epsilon)}$ vers un mouvement brownien d'après le théorème de la limite centrale.

iii) Dans les constructions précédentes on a considéré des processus associés à des événements se produisant à intervalles de temps réguliers. Or, du point de vue de l'interprétation physique du mouvement brownien comme mouvement d'une particule soumise à des chocs aléatoires, il serait plus raisonnable de supposer des chocs se produisant à des instants indépendants, ce qui correspond à un mécanisme d'arrivées poissoniennes (voir le cours de files d'attente), c'est à dire avec des durée d'inter-arrivée entre deux événements qui suivent une exponentielle. En considérant la remarque ii) précédente on pourra prendre un processus de poisson N_t d'intensité $1/\delta$ associé à des événements décrits par des variables centrées, d'amplitude V_n de variance $\text{var}[V_n] = \epsilon^2 = \sigma^2\delta$ (par exemple $V_n = \pm\sigma\sqrt{\delta}$ de façon équiprobable). Le processus $X_t^{(\delta, \epsilon)} = \sum_{n=1}^{N_t} V_n$ est centré, de variance

$$\text{var}[X_t^{(\delta, \epsilon)}] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{N_t} V_n^2 \mid N_t \right] \right] = \mathbb{E}[N_t \sigma^2 \delta] = \frac{t}{\delta} \sigma^2 \delta = \sigma^2 t. \quad (2.13)$$

La convergence en loi de $X_t^{(\delta, \epsilon)} = \sum_{n=1}^{N_t} V_n$ lorsque $\delta \rightarrow \infty$ est là encore liée au théorème de la limite centrale. On voit donc que l'hypothèse d'intervalles réguliers entre événements n'est pas nécessaire pour construire le mouvement brownien.

"Randomisation" d'un espace de Hilbert

Pour un rappel sur les espaces de Hilbert, on pourra voir le chapitre 9 du polycopié d'analyse numérique et optimisation [3]. Notons $L^2([0, 1])$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions égales presque partout et de carré intégrable sur $[0, 1]$ pour la mesure de Lebesgue. Etant donnée une base orthonormée $(\phi_n)_{n \geq 0}$ de $L^2([0, 1])$ et une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites $(V_n)_{n \geq 0}$ indépendantes, le processus aléatoire

$$X_t = \sum_{k \geq 0} \left(\int_0^t \phi_k(u) du \right) V_k = \sum_{k \geq 0} \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{[0, t]} \phi_k(u) du \right) V_k \quad (2.14)$$

est gaussien centré et vérifie, d'après la **formule de parseval**,

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \sum_{k \geq 0} \left(\int_0^t \phi_k(u) du \right)^2 = t. \quad (2.15)$$

De plus, pour $s < t$,

$$X_t - X_s = \sum_n \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{[s, t]} \phi_n(u) du \right) V_n. \quad (2.16)$$

Par suite, la relation de conservation du produit scalaire entre les variables de la forme $X_t - X_s$ et les vecteurs correspondants de coefficients de Fourier s'exprime par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t - X_s)(X_{t'} - X_{s'})] &= \sum_n \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[s,t]}(u) \phi_n(u) du \right) \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[s',t']} \phi_n(v) dv \right) \\ &= \sum_n \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[s,t] \cap [s',t']} (u) \phi_n(u) du \right)^2 \\ &= \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{[s,t] \cap [s',t']} (u) du \end{aligned} \tag{2.17}$$

ce qui établit directement que le processus est à accroissements orthogonaux et permet de conclure que X est un mouvement brownien standard sur $[0, 1]$.

Historiquement, cette construction fût la première construction du mouvement brownien, proposée par Wiener en 1923 avec une base de fonctions trigonométriques. En considérant la base trigonométrique sur $[0, 1]$ on obtient une décomposition du mouvement brownien de la forme

$$B_t = tV_0 + \sqrt{2} \sum_{n>0} \frac{\sin(\pi nt)}{n\pi} V_n. \tag{2.18}$$

Ex. Vérifier la formule précédente. Tracer une réalisation des approximations du mouvement brownien sur $[0, 1]$ fournies par le développement précédent.

En pratique, il peut être plus intéressant de considérer des bases localisées de $L^2([0, 1])$ telles que les fonctions de Haar pour réaliser cette construction ([4] pp.18-21).

2.4 Martingales

2.4.1 Filtrations

Dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on dit qu'une famille de sous-tribus $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de \mathcal{A} est une **filtration** si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour $0 \leq s < t$.

Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est dit **adapté** à $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (ou \mathcal{F} -adapté) si, pour tout $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable. Souvent, on considère pour \mathcal{F} la **filtration canonique** du processus $X : \mathcal{F}_t = \sigma(\{X_u\}_{u \leq t})$. Dans la suite, étant donné un mouvement brownien $B = (B_t)_{t \geq 0}$, sauf indication contraire \mathcal{F}_t représentera sa filtration canonique.

2.4.2 Martingale

On dira qu'un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une **martingale** relativement à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$,

1. M_t est \mathcal{F}_t -mesurable (M est \mathcal{F} -adapté)
2. $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_t] < \infty$
3. $\mathbb{E}[M_t|M_s] = M_s$ pour tout $s \leq t$.

On vérifiera facilement que le mouvement brownien est une martingale pour sa filtration canonique.

2.4.3 Inégalité de Doob

Théorème 6 (théorème de Doob) *Pour une martingale $M = (M_t)_{t \geq 0}$ dont les trajectoires sont continues p.s., on a*

$$\forall T \geq 0, \forall p \geq 1, \forall \lambda > 0, P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda \right] \leq \frac{\mathbb{E}[|M_T|^p]}{\lambda^p}. \quad (2.19)$$

Chapitre 3

L'intégrale d'Itô

3.1 Position du problème

Une équation différentielle classique est souvent donnée sous la forme explicite

$$\frac{dx_t}{dt} = b_t(x_t). \quad (3.1)$$

Notons que les équations d'ordre $n > 1$, c.à.d. qui font intervenir des dérivées de x_t jusqu'à l'ordre n , peuvent également en général se formuler à partir de l'équation (3.1) en intégrant les dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ dans un vecteur $x(t)$ de taille augmentée. En effet, l'équation $x_t^{(n)} = f_t(x_t, x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(n-1)})$ se réécrit sous la forme $\mathbf{x}'_t = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_t)$, avec $\mathbf{x}_t = [x_t, x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(n-1)}]^T$ et $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_t) = [x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(n-1)}, f_t(x_t, x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(n-1)})]^T$.

Lorsque des phénomènes aléatoires viennent perturber l'équation (3.1), ils peuvent être pris en compte par l'ajout d'un terme supplémentaire de bruit, ce que l'on exprimera sous la forme

$$\frac{dX_t}{dt} = b_t(X_t) + \sigma_t(X_t)W_t \quad (3.2)$$

où W_t est une grandeur aléatoire. Dans beaucoup de situations, le processus $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un bruit blanc, c'est à dire un processus aléatoire stationnaire centré dont les variables aléatoires sont indépendantes. En fait, la construction d'un tel processus est délicate et utilise la notion de processus généralisé qui fait intervenir une extension au cas aléatoire de la théorie des distributions ([2] chap.6). Une façon plus simple de procéder consiste à reformuler l'équation (3.2) sous la forme

$$dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)W_t dt \quad (3.3)$$

puis à considérer une version discrétisée de cette équation, de la forme

$$X_{k+1} = X_k + b_k(X_k)\Delta_k + \sigma_k(X_k)W_k\Delta_k \quad (3.4)$$

avec les notations suivantes, qui à défaut d'être très rigoureuses sont le mérite de simplifier les écritures : $X_k = X_{t_k}$, $W_k = W_{t_k}$ et $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$. Si on cherche à exprimer $W_k\Delta_k$

comme l'accroissement d'un certains processus $V = (V_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, c.à.d. $W_k \Delta_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$, les propriétés du bruit blanc W entraînent que V devrait être à accroissements centrés, stationnaires et indépendants. Or, on a indiqué au chapitre II que les seuls processus V de ce type qui possèdent des trajectoires continues sont les mouvements browniens. On conviendra donc de prendre pour V un mouvement brownien, que l'on notera B . On pourra ainsi écrire (3.4) sous la forme

$$X_{k+1} = X_k + b_k(X_k)\Delta_k + \sigma_k(X_k)\Delta B_k, \quad (3.5)$$

avec $\Delta B_k = B_{k+1} - B_k$. En propageant cette équation, on trouve alors

$$X_{k+1} = X_0 + \sum_{j=0}^k b_j(X_j)\Delta_j + \sum_{j=0}^k \sigma_j(X_j)\Delta B_j. \quad (3.6)$$

Lorsque $\max_j \Delta_j \rightarrow 0$, en supposant que l'on ait fixé $t_{k+1} = t$, la première somme du terme de droite de (3.6) converge en moyenne quadratique vers

$$I_1 = \int_0^t b_u(X_u)du. \quad (3.7)$$

En fait, cette intégrale peut être définie dès lors que $\int_{[0,t]^2} \mathbb{E}[b_u(X_u)b_v(X_v)]dudv < \infty$ ([2] p.15) comme la limite en moyenne quadratique de $\sum_{j=0}^k b_j(X_j)\Delta_j$.

De même, on voudrait pouvoir établir l'existence d'une limite, en moyenne quadratique, pour la deuxième somme lorsque $\max_j \Delta_j \rightarrow 0$, cette limite étant notée

$$I_2 = \int_0^t \sigma_u(X_u)dB_u. \quad (3.8)$$

Notons que si $\sigma_u(X_u)$ est une fonction déterministe indépendante de X_u , alors l'expression (3.8) correspond à l'intégration d'une fonction déterministe par une mesure aléatoire dont la construction est rappelée en annexe I. La construction de l'intégrale (3.8) dans le cas où $\sigma_u(X_u)$ dépend effectivement de X_u s'avère par contre plus délicate et va faire l'objet de la section suivante.

3.2 Construction de l'intégrale d'Itô

3.2.1 Fonctions élémentaires

Comme pour l'intégration classique des fonctions continues, pour construire des intégrales sur un intervalle $[a, b]$ de la forme

$$\int_a^b X_t dB_t \quad (3.9)$$

(où X est un processus aléatoire) en un sens que l'on va préciser ci dessous, on commence par définir des subdivisions $(t_k^{(n)})_k$ de $[a, b]$ par

$$t_k^{(n)} = a \mathbb{I}_{k2^{-n} < a} + k2^{-n} \mathbb{I}_{a \leq k2^{-n} \leq b} + b \mathbb{I}_{b < k2^{-n}}. \quad (3.10)$$

Et comme pour l'intégrale de Riemann, on va considérer les fonctions en escalier, mais ici aléatoires de la forme

$$\phi_t^{(n)}(\omega) = \sum_{k \geq 0} e_k^{(n)}(\omega) \mathbb{1}_{[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}[}(t) \quad (3.11)$$

que l'on appellera **fonctions, ou processus, élémentaires**. Pour les fonctions élémentaires, on peut alors définir

$$\int_a^b \phi_t^{(n)} dB_t = \sum_k e_k^{(n)} \Delta B_k. \quad (3.12)$$

Pour construire l'intégration de processus plus généraux, il est raisonnable de voir les variables aléatoires $e_k^{(n)}$ comme les valeurs discrétisées sur les intervalles $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}[$ d'un certain processus aléatoire X_t .

Cependant, et c'est la grande différence avec l'intégrale de Riemann, le choix du point de discrétisation dans cet intervalle n'est pas neutre. Pour s'en convaincre, considérons le cas où $X_t = B_t$ et étudions la moyenne de l'expression (3.12) lorsqu'on prend respectivement $e_k^{(n)} = B_k$ et $e_k^{(n)} = B_{k+1}$. Comme le processus B_t est à accroissements orthogonaux,

$$\mathbb{E}[B_k(B_{k+1} - B_k)] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[B_{k+1}(B_{k+1} - B_k)] = \mathbb{E}[(B_{k+1} - B_k)^2] = \Delta_k. \quad (3.13)$$

Donc, pour ces deux choix, on obtient respectivement pour $\mathbb{E}[\int_a^b \phi^{(n)}(t, \omega) dB_t]$ les valeurs 0 et $b - a$.

Les deux cas les plus intéressants sont ceux pour lesquels on choisit les valeurs de X_t échantillonnées respectivement en t_k et en $(t_k + t_{k+1})/2$. Les intégrales correspondantes obtenues par passage à la limite sont connues sous le nom d'**intégrale d'Itô** et d'**intégrale de Stratonovich**. Les deux intégrales peuvent être reliées assez simplement et on se limitera dans la suite à l'étude de l'intégrale d'Itô qui, comme on le verra, présente l'avantage d'être une martingale (ce qui permet de simplifier certains calculs).

3.2.2 Espace $\mathcal{V}([a, b])$

On va donc construire l'intégrale d'Itô (3.9) pour une classe importante de processus X_t . On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration canonique de B et on se donne la famille suivante :

Définition On définit la famille $\mathcal{V}([a, b])$ des processus aléatoires $X = (X_t)_{t \geq 0}$ qui vérifient

1. Les trajectoires de X sont p.s. mesurables sur la tribu borélienne $\mathcal{B}([a, b])$ de $[a, b]$.
2. X est \mathcal{F} -adapté
3. $\mathbb{E}[\int_a^b X_t^2 dt] < \infty$

On notera en particulier que la deuxième condition entraîne que les fonctions élémentaires $\phi_t = \sum_{k \geq 0} e_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t)$ qui appartiennent à $\mathcal{V}([a, b])$ sont celles pour lesquelles les variables e_k appartiennent à \mathcal{F}_{t_k} .

La construction de l'intégrale d'Itô repose en partie sur le résultat suivant :

Théorème 7 (Isométrie d'Itô pour les fonctions élémentaires) *Pour toute fonction élémentaire ϕ_t de $\mathcal{V}([a, b])$, on considère la relation $\phi_t \rightarrow \int_a^b \phi_t dB_t$. On a alors la relation d'isométrie suivante*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b \phi_t dB_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b \phi_t^2 dt\right]. \quad (3.14)$$

Ex. Démontrer l'isométrie d'Itô pour les fonctions élémentaires.

On peut ensuite terminer la construction de l'intégrale d'Itô (3.9) pour les éléments de $\mathcal{V}([a, b])$. Notons qu'il est cependant possible de relâcher les hypothèses précédentes et construire l'intégrale d'Itô pour des classes de fonctions plus larges que $\mathcal{V}([a, b])$ ([9] p.34). La construction de l'intégrale repose d'une part sur l'isométrie d'Itô (théorème 7) et sur le théorème d'approximation suivant :

Théorème 8 (Intégrale d'Itô) *Pour tout processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ de $\mathcal{V}([a, b])$, il existe une suite $(\phi_t^{(n)})_{t \geq 0}$ de fonctions élémentaires de $\mathcal{V}([a, b])$ pour laquelle*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |X_t - \phi_t^{(n)}|^2 dt \right] = 0. \quad (3.15)$$

Preuve (indications) A défaut d'une preuve plus détaillée qu'on pourra trouver dans [9] indiquons ici les étapes de la démarche qui conduit au résultat. On établit successivement que

1. tout processus borné Y_t de $\mathcal{V}([a, b])$ dont les trajectoires sont continues est limite d'une suite de fonctions élémentaires de $\mathcal{V}([a, b])$ (dans le sens où $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |Y_t - \phi_t^{(n)}|^2 dt \right] = 0$) ;
2. tout processus borné de $\mathcal{V}([a, b])$ est limite d'une suite de processus de $\mathcal{V}([a, b])$ dont les trajectoires sont continues ;
3. tout processus de $\mathcal{V}([a, b])$ est limite d'une suite de processus bornés de $\mathcal{V}([a, b])$.

Le second point est un peu plus délicat et met en oeuvre des approximations de l'identité dont le support doit être choisi de sorte que les approximations continues soient \mathcal{F} -adaptées. \square

Pour les éléments de $\mathcal{V}([a, b])$ on définit alors l'intégrale d'Itô de X_t sur $[a, b]$ comme limite d'une suite d'intégrales d'Itô de fonctions élémentaires $\phi_t^{(n)}$ qui vérifient la relation (3.15) :

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_t^{(n)} dB_t \quad (3.16)$$

où la limite est une limite en moyenne quadratique (limite dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$).

Ex. Vérifier que la limite précédente ne dépend pas du choix d'une suite particulière de fonctions élémentaires $\phi_t^{(n)}$ qui vérifie la relation (3.15).

L'isométrie d'Itô du théorème 7 s'étend par passage à la limite à l'ensemble des fonctions de $\mathcal{V}([a, b])$:

Théorème 9 (Isométrie d'Itô) *Pour tout processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ de $\mathcal{V}([a, b])$, on a la relation d'isométrie suivante*

$$\mathbb{E}[(\int_a^b X_t dB_t)^2] = \mathbb{E}[\int_a^b X_t^2 dt]. \quad (3.17)$$

Il en résulte en particulier que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt = 0$, alors $\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b X_t^{(n)} dB_t$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3.2.3 Représentation des martingales

On pourra laisser de côté ce paragraphe en première lecture.

Définissons maintenant $\mathcal{V} = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{V}([0, t])$ et indiquons le résultat suivant relatif à la propriété de martingale de l'intégrale d'Itô et à la représentation des martingales :

Théorème 10 (Théorème de représentation des martingales de Doob) *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de \mathcal{V} . Alors, le processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ défini par*

$$M_t = \int_0^t X_u dB_u \quad (3.18)$$

admet une modification continue et est une martingale.

Inversement, toute martingale \mathcal{F} -adaptée admet une unique représentation de la forme (3.18), à une constante additive près.

Ex. montrer que pour $X \in \mathcal{V}$ et $T, \lambda > 0$:

$$P[\sup_{0 \leq t \leq T} |\int_0^t X_u dB_u| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E}[\int_0^T |X_t|^2 dt]. \quad (3.19)$$

3.3 Exemple

De même que la méthode de construction de l'intégrale de Riemann à partir de fonctions en escalier est généralement peu utile pour le calcul pratique des intégrales classiques, les résultats ci dessus sont peu employés en pratique pour le calcul des intégrales stochastiques. On présentera pour cela dans le chapitre suivant la **formule d'Itô** dont on verra comment la mettre en oeuvre pour le calcul des intégrales stochastiques et pour la résolution des équations différentielles stochastiques (EDS).

Indiquons quand même ici un exemple de calcul direct en cherchant à calculer

$$I = \int_0^t B_u dB_u \quad (3.20)$$

comme limite d'intégrales de fonctions élémentaires. On prendra les fonctions suivantes :

$$\phi_t^{(n)} = \sum B_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t). \quad (3.21)$$

On a alors bien

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_t^{(n)} - B_t)^2 dt\right] &= \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}[(B_i - B_u)^2] du \\ &= \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) ds \\ &= \frac{1}{2} \sum (t_{i+1} - t_i)^2 \xrightarrow{\Delta_i \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

ce qui permet de calculer I comme la limite des intégrales $\int_0^t \phi_t^{(n)} dt$.

Pour calculer $\int_0^t \phi_t^{(n)} dt = \sum B_i \Delta B_i$, notons que

$$\Delta(B_i^2) = B_{i+1}^2 - B_i^2 = (B_{i+1} - B_i)^2 + 2B_i(B_{i+1} - B_i) = (\Delta B_i)^2 + 2B_i \Delta B_i. \quad (3.23)$$

Donc,

$$\int_0^t \phi_t^{(n)} dt = \frac{1}{2} \sum \Delta(B_i^2) - \frac{1}{2} \sum (\Delta B_i)^2. \quad (3.24)$$

Pour préciser la première somme du terme de droite, notons que comme $B_0 = 0$ on a finalement $\sum \Delta(B_i^2) = B_t^2$. Pour calculer la seconde somme, remarquons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\sum (\Delta B_i)^2 - t)^2] &= \mathbb{E}[(\sum (\Delta B_i)^2)^2] - t^2 \\ &= 2 \sum_{i < j} \Delta t_i \Delta t_j + 3 \sum_i (\Delta t_i)^2 - t^2 \\ &= (\sum \Delta t_i)^2 + 2 \sum_i (\Delta t_i)^2 - t^2 \\ &= t^2 + 2 \sum_i (\Delta t_i)^2 - t^2 \xrightarrow{\Delta_i \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La deuxième égalité provient du fait que pour une variable centrée gaussienne Y on a $\mathbb{E}[Y^4] = 3(\mathbb{E}[Y^2])^2$. Donc $\sum (\Delta B_i)^2$ tend vers t dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $\int_0^t \phi_t^{(n)} dt$ tend donc vers $(B_t^2 - t)/2$, ce qui permet finalement de conclure que

$$\boxed{\int_0^t B_u dB_u = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t} \quad (3.26)$$

On notera la différence entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale d'Itô qui fait apparaître ici le terme supplémentaire $-t/2$.

On a donc réussi à calculer l'intégrale d'Itô cherchée, mais comme indiqué auparavant cette approche directe est laborieuse. Le chapitre suivant va nous fournir des outils plus efficaces pour intégrer les EDS.

Chapitre 4

Intégration des EDS.

Comme pour les équations différentielles ordinaires (EDO, ou en anglais ODE pour *Ordinary Differential Equation*), il n'est pas possible en général d'obtenir une forme analytique pour une équation différentielle stochastique (EDS, ou en anglais SDE pour *Stochastic Differential Equation*). Cependant, un certain nombre d'EDS de base admettent une solution analytique que l'on peut souvent obtenir grâce à la **formule d'Itô**. Ce chapitre est consacré à sa présentation et à sa manipulation à travers quelques exemples.

4.1 Formule d'Itô

L'exemple d'intégrale (3.26) se réécrit

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_u du + \int_0^t \frac{1}{2} du. \quad (4.1)$$

Plus généralement, on définira un **processus d'Itô** comme un processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(X_s) ds + \int_0^t \sigma_s(X_s) dB_s, \quad (4.2)$$

où $\sigma \in \mathcal{V}$ et b est \mathcal{F} -adapté, avec $\int_0^t |b_s| ds < \infty$ (p.s.). On réécrira encore la relation (4.2) sous la forme différentielle équivalente

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t. \quad (4.3)$$

Notons ici que les fonctions b_t et σ_t sont appelées respectivement **fonction de dérive** ou de **drift** et **fonction de diffusion**. On a ici omis d'indiquer la dépendance de b_t et de σ_t vis à vis de X_t à seule fin de simplifier les écritures.

Théorème 11 (formule d'Itô) *Pour un processus d'Itô de la forme (4.2) et $g \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, le processus $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ défini par $Y_t = g(t, X_t)$ est un processus d'Itô qui vérifie*

$$\boxed{dY_t = \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} (dX_t)^2} \quad (4.4)$$

avec les conventions d'écriture

$$(dX_t)^2 = dX_t.dX_t, dt.dt = 0, dt.dB_t = dB_t.dt = 0, et dB_t.dB_t = dt. \quad (4.5)$$

Pour compléter le théorème précédent, en appliquant les conventions d'écriture indiquée, notons que pour $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$ on a simplement $(dX_t)^2 = \sigma_t^2 dt$. Par suite on peut expliciter la formule d'Itô (4.4) :

$$dY_t = \left(\frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} b_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} \sigma_t dB_t \quad (4.6)$$

Tous les résultats présentés ici s'étendent directement au cas d'un processus vectoriel (voir la section suivante), ce qu'il est important de souligner en particulier en vue de résoudre des équations différentielles stochastiques d'ordre supérieur à un (voir le premier paragraphe de ce chapitre).

On ne démontrera pas ici le théorème 11 (voir [9] pp. 46-48). On va plutôt s'intéresser ici à la mise en oeuvre de ce résultat sur quelques exemples.

4.1.1 Exemples

Exemple 1 Pour $X_t = B_t$ et $g(t, x) = x^2/2$ on a $Y_t = g(t, X_t) = (\frac{1}{2}B_t)^2$, il vient d'après la formule d'Itô que $dX_t = dB_t$, et $(dX_t)^2 = dt$. Donc,

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt. \quad (4.7)$$

On retrouve ainsi la formule (3.26) de façon directe.

Exemple 2 Pour calculer $\int_0^t s B_s$ posons $X_t = B_t$ et $g(t, B_t) = t B_t$. D'après la formule d'Itô, $d(t B_t) = B_t dt + t dB_t$, soit

$$\int_0^t u dB_u = t B_t - \int_0^t B_u du. \quad (4.8)$$

La formule précédente s'apparente à une intégration par partie. Plus généralement, pour une fonction f_t déterministe intégrable on a le résultat suivant :

$$\int_0^t f_u dB_u = f_t B_t - \int_0^t B_u df_u. \quad (4.9)$$

4.1.2 Formule d'Itô vectorielle

La formule d'Itô s'étend au cas vectoriel comme suit :

Théorème 12 (formule d'Itô vectorielle) Soient $B_t = [B_{1,t}, \dots, B_{m,t}]^T$ représente un mouvement brownien de dimension m (c'est à dire que ses composantes sont des mouvements browniens indépendants) et $X_t = [X_{1,t}, \dots, X_{n,t}]^T$ représente un processus d'Itô de dimension n de la forme

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \begin{bmatrix} b_{1,t} \\ \vdots \\ b_{n,t} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \dots & \sigma_{1m,t} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1,t} & \dots & \sigma_{nm,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{m,t} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

et $Y_t = g(t, X_t) = [g_1(t, X_t), \dots, g_p(t, X_t)]^T = [Y_{1,t}, \dots, Y_{p,t}]^T$ avec g de classe $C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Alors, Y est un processus d'Itô donné par

$$dY_{k,t} = \frac{\partial g_k(t, X_t)}{\partial t} dt + [\nabla_x g_k(t, X_t)]^T dX_t + \frac{1}{2} dX_t^T \nabla_x^2 g_k(t, X_t) dX_t \quad (4.11)$$

avec

$$[\nabla_x g_k(t, X_t)]_i = \frac{\partial g_k(t, X_t)}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad [\nabla_x^2 g_k(t, X_t)]_{ij} = \frac{\partial^2 g_k(t, X_t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.12)$$

et en utilisant les conventions $dB_{i,t}.dt = dt.dB_{i,t} = 0$ et $dB_{i,t}.dB_{j,t} = \delta_{ij}dt$.

L'exemple suivant illustre l'emploi de la formule d'Itô vectorielle :

Exemple Pour $X_t = B_t$, on définit $Y_t = \mathbf{g}(t, X_t) = [\cos X_t, \sin X_t]^T$. En utilisant la formule d'Itô vectorielle on obtient alors

$$dY_t = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(B_t) \\ \sin(B_t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} -\sin(B_t) \\ \cos(B_t) \end{bmatrix} dB_t \quad (4.13)$$

4.2 Intégration des EDS

Pour terminer ce chapitre, revenons maintenant à notre point de départ qui est le problème de l'intégration des équations différentielles stochastiques de la forme $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$.

4.2.1 Exemples

Exemple 1 Considérons pour commencer l'équation suivante,

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t. \quad (4.14)$$

On peut voir ce modèle comme un modèle de croissance exponentielle d'une population, de la forme $\frac{d}{dt}X_t = a_t X_t dt$ pour lequel le coefficient a_t serait de la forme $a_t = r + \alpha W_t$, où W est un bruit blanc. En mathématiques financières ce modèle est connu sous le nom de **modèle de Black-Scholes**. Le modèle (4.14) se réécrit encore

$$\int_0^t \frac{dX_t}{X_t} = rt + \alpha B_t. \quad (4.15)$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction $g(t, x) = \ln(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 dt \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)dt + \alpha dB_t \end{aligned} \tag{4.16}$$

d'où il vient que

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t\right). \tag{4.17}$$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve bien la solution déterministe classique. La solution (4.17) est encore appelée **mouvement brownien géométrique**.

On voit que la limite de la solution lorsque $t \rightarrow \infty$ existe (et vaut 0) lorsque $r - \frac{1}{2}\alpha^2 < 0$.

Exemple 2 (équation de Langevin) On considère l'équation de Langevin définie par

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dB_t. \tag{4.18}$$

avec $b, \sigma > 0$. En multipliant l'équation par e^{bt} on trouve $e^{bt}dX_t = -be^{bt}X_t dt + \sigma e^{bt}dB_t$. En appliquant par ailleurs la formule d'Itô avec $Y_t = g(t, X_t) = e^{bt}X_t$ on trouve

$$d(e^{bt}X_t) = be^{bt}X_t dt + e^{bt}dX_t = \sigma e^{bt}dB_t. \tag{4.19}$$

Donc, $Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{bu}dB_u$ et

$$X_t = e^{-bt}X_0 + \int_0^t \sigma e^{-b(t-u)}dB_u. \tag{4.20}$$

Ce processus est appelé **processus d'Ornstein-Ulhenbeck**.

Ex. Vérifier que pour le processus d'Ornstein-Ulhenbeck, si X_0 est indépendant de B on a $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]e^{-bt}$ et

$$cov(X_t, X_s) = var(X_0)e^{-b(t+s)} + \frac{\sigma^2}{2b}(e^{-b|t-s|} - e^{-b|t+s|}). \tag{4.21}$$

En déduire que si $\mathbf{X}_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2b)$ alors le processus est stationnaire.

Ex. Si B est un mouvement brownien, vérifier en utilisant les résultats de l'exercice précédent que le processus défini par

$$X_t = \frac{\sigma}{\sqrt{2b}}e^{-bt}B(e^{2bt}) \tag{4.22}$$

est un processus d'Ornstein-Ulhenbeck stationnaire.

4.2.2 Existence de solutions

On a indiqué dans la section précédente comment on pouvait en pratique calculer la solution de certaines EDS. En fait, concernant les conditions d'existence d'une solution sur un intervalle $[0, T]$ avec la condition initiale $X_0 = Z$, une variable aléatoire fixée de variance finie et indépendante de B , celles ci sont de même nature que ce qu'on rencontre dans le cas déterministe :

Théorème 13 *Pour l'équation $dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t$ avec $X_0 = Z$, indépendant de B , on aura une unique solution continue en t , adaptée à \mathcal{F}^Z , avec $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(\{B_s; s \leq t\} \cup \{Z\})$ et telle que $\mathbb{E}[\int_0^T X_t^2 dt] < \infty$ dès lors qu'il existe des constantes C et D telles que*

$$\begin{aligned} |b_t(x)| + |\sigma_t(x)| &< C(1 + |x|) \\ |b_t(x) - b_t(y)| + |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| &< D|x - y|. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Preuve Voir [9] pp. 68-71. \square

Notons que la notion de solution d'une EDS considérée jusqu'ici était exprimée en fonction du mouvement brownien B supposé fixé. On parle alors de **solution forte**. Par contre, la donnée d'un certain couple (X, B) pour lequel l'EDS est vérifiée est qualifiée de **solution faible**.

Chapitre 5

Intégration numérique des EDS

On va voir que l'on peut adapter les méthodes d'intégration des EDO pour le calcul numérique des EDS mais que l'ordre des méthodes (c'est à dire leur vitesse de convergence) pour un même type d'approche est plus faible que pour les EDO. On commencera par considérer la **méthode d'Euler** dont on comparera le comportement dans les cas déterministe et stochastique. On s'intéressera ensuite à la **méthode de Milstein** et à la **méthode de Runge-Kutta**, plus sophistiquées mais qui lui sont préférables.

5.1 Rappels sur l'intégration numérique des EDO

Pour intégrer des EDO de la forme $\frac{d}{dt}x_t = b_t(x_t)$, avec x_0 fixé, la méthode la plus simple est la méthode d'Euler qui est basée, pour un pas h fixé, sur les approximations successives de x_t de la forme

$$\hat{x}_{t+h} = \hat{x}_t + b_t(\hat{x}_t). \quad (5.1)$$

Ainsi, $\hat{x}_{kh} = x_0 + \sum_{i=0}^{(i-1)h} b_{ih}(\hat{x}_{ih})$ et on définira l'**erreur absolue** à l'instant T par

$$E_{T,h} = |x_T - \hat{x}_T|. \quad (5.2)$$

On peut montrer que pour h suffisamment petit, dès lors qu'on a une solution unique sur $[0, T]$ pour x_t la méthode d'Euler vérifie $E_{T,h} \leq Ch$ pour un certain $C > 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$. On dit que la méthode d'Euler est d'ordre 1. Plus généralement on définira l'**ordre d'une méthode d'intégration** des EDO comme le plus grand réel $\gamma > 0$, s'il existe, tel que

$$E_{T,h} \leq Ch^\gamma \quad (5.3)$$

pour un certain $C > 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$. Bien entendu, plus l'ordre est élevé et plus la technique d'intégration numérique considérée est performante.

Une méthode populaire et performante d'intégration numérique des EDO est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (parfois notée RK4) dont le schéma prend la forme suivante :

$$\hat{x}_{t+h} = \hat{x}_t + \frac{h}{6} [k_t^{(1)} + 2k_t^{(2)} + 2k_t^{(3)} + k_t^{(4)}] \quad (5.4)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} k_t^{(1)} = a_t(\hat{x}_t) \\ k_t^{(2)} = a_{t+\frac{h}{2}}(\hat{x}_t + \frac{h}{2}k_t^{(1)}) \\ k_t^{(3)} = a_{t+\frac{h}{2}}(\hat{x}_t + \frac{h}{2}k_t^{(2)}) \\ k_t^{(4)} = a_{t+h}(\hat{x}_t + hk_t^{(3)}) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

5.2 Intégration numérique des EDS par la méthode d'Euler

5.2.1 Méthode d'Euler

Le schéma d'Euler appliqué à l'intégration numérique de l'EDS

$$dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t \quad (5.6)$$

conduit à l'approximation

$$\boxed{\hat{X}_{t+h} = \hat{X}_t + b_t(\hat{X}_t)h + \sigma_t(\hat{X}_t)\Delta B_t} \quad (5.7)$$

avec $\Delta B_t = B_{t+h} - B_t$.

Exemple Pour l'EDS de l'exemple (4.14) :

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t \quad (5.8)$$

dont on a vu que la solution s'écrit

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t\right) \quad (5.9)$$

la méthode d'Euler conduit à

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{X}_t + rh\hat{X}_t + \alpha\hat{X}_t\Delta B_t. \quad (5.10)$$

Pour la même trajectoire discrétisée de B la solution exacte aux points de discrétisation est directement fournie par la relation (5.9).

5.2.2 Interpolation des solutions discrètes

On peut interpoler une trajectoire discrétisée (exacte ou approchée) calculée aux points $(kh)_{k \geq 0}$ par une interpolation linéaire. Plus généralement, on pourra employer un pont brownien (voir le paragraphe 2.3.2) : pour un point θh choisi entre les points t et $t+h$ ($\theta \in [0, 1]$), on pourra prendre

$$\hat{X}_{t+\theta h} = \hat{X}_t + \theta h b_t(\hat{X}_t) + \sigma_t(\hat{X}_t)V_t^\theta \quad (5.11)$$

où

$$V_t^\theta \sim \mathcal{N}((1-\theta)B_t + \theta B_{t+h}, h\theta(1-\theta)). \quad (5.12)$$

Notons que l'interpolation linéaire entre les points $P_t = (t, \hat{X}_t)$ et $P_{t+h} = (t+h, \hat{X}_{t+h})$ revient à prendre $V_t^\theta = (1-\theta)B_t + \theta B_{t+h}$. L'interpolant linéaire représente donc la trajectoire moyenne du pont brownien sur le segment $[P_t, P_{t+h}]$.

5.2.3 Ordre

Dans le cas stochastique, on décrit classiquement les performances d'une méthode au moyen de l'**erreur moyenne absolue** définie par

$$E_{T,h} = \mathbb{E}[|X_T - \hat{x}_T|]. \quad (5.13)$$

Si $\lim_{h \rightarrow 0} E_{T,h} = 0$ on dira que le schéma de discrétisation envisagé **converge fortement**. Cette convergence forte sera dite d'ordre γ si $E_{T,h} \leq Ch^\gamma$ pour un certain $C > 0$ et tout h d'un certain intervalle $]0, h_0]$.

On peut démontrer que la méthode d'Euler appliquée aux EDS est fortement convergente, d'ordre $\gamma = 1/2$. On remarque ici que l'ordre γ de la méthode d'Euler est deux fois plus faible dans le cas stochastique que dans le cas déterministe. On pourra vérifier ce résultat sur l'exemple proposé dans l'exercice suivant.

5.3 Intégration numérique des EDS par la méthode de Milstein

L'approximation de Taylor fournie ci dessus n'est que d'ordre 1/2 du fait que le terme en $\sigma(X_t)\Delta B_t$ de l'équation (5.7) est d'ordre 1/2 car $\mathbb{E}[(\Delta B_t)^2] = h$. Il faut donc, pour obtenir une méthode fortement convergente d'ordre $\gamma = 1$ pousser plus loin le développement du terme $\sigma(X_t)dB_t$ de l'EDS en intégrant le terme d'ordre 1 en $(\Delta B_t)^2$. On obtient alors la méthode de Milstein dont le schéma s'écrit comme suit :

$$X_{t+h} = \hat{X}_t + hb_t(\hat{X}_t) + \sigma_t(\hat{X}_t)\Delta B_t + \frac{1}{2}\sigma_t(\hat{X}_t)\frac{d\sigma_t}{dx}(\hat{X}_t)((\Delta B_t)^2 - h) \quad (5.14)$$

Cette formule provient des approximations successives suivantes

$$\begin{aligned} X_{t+h} &\approx X_t + hb_t(X_t) + \int_t^{t+h} [\sigma_t(X_t) + \frac{d\sigma_t}{dx}(X_t)\sigma_t(X_t)(B_u - B_t)]dB_u \\ &\approx X_t + hb_t(X_t) + \sigma_t(X_t)\Delta B_t + \frac{1}{2}\frac{d\sigma_t}{dx}(X_t)\sigma_t(X_t)[(\Delta B_t)^2 - h] \end{aligned} \quad (5.15)$$

car, d'après la formule (4.7), on a $d(\frac{1}{2}B_t^2) = B_tdB_t + \frac{1}{2}dt$ et donc

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} (B_u - B_t)dB_u &= [\frac{1}{2}(B_{t+h}^2 - B_t^2) - \frac{1}{2}h] - B_t(B_{t+h} - B_t) \\ &= \frac{1}{2}[(B_{t+h} - B_t)^2 - h]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.4 Méthodes d'ordre supérieur à un

Comme on l'a vu dans le cas des EDO, il est également possible de construire des méthodes d'ordre supérieur à 1 pour les EDS. On pourra se référer à [6] pour de telles méthodes. Notons simplement que les schémas de discrétisation des EDS deviennent rapidement très complexes avec l'augmentation de l'ordre de la méthode. Pour développer de telles méthodes, on peut considérer les versions stochastiques des **formules de Taylor** avec reste intégrale que l'on va présenter rapidement, ou d'autres méthodes comme les méthodes de Runge-Kutta.

5.4.1 Formules de Taylor

Cas déterministe

Commençons par rappeler la forme des formules de Taylor avec reste intégrale dans le cas déterministe et leur emploi pour approcher les EDO. Pour une EDO de la forme $\frac{d}{dt}x_t = b_t(x_t)$ et une fonction $f_t(x_t)$ dérivable on a $\frac{d}{dt}f_t(x_t) = f_t^t(x_t) + b_t(x_t)f_t^x(x_t)$ que l'on notera $Lf_t(X_t)$, avec la notation $f_t^u = \frac{\partial f_t}{\partial u}$. On a ainsi

$$f_t(x_t) = f_{t_0}(x_{t_0}) + \int_{t_0}^t Lf_u(X_u)du. \quad (5.17)$$

Pour x_t la formule de Taylor avec reste intégrale s'écrira, en exploitant la relation (5.17) pour $f = b$, puis en itérant la formule :

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t_0} + \int_{t_0}^t b_u(x_u)du \\ &= x_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(b_{t_0}(x_{t_0}) + \int_{t_0}^u Lb_v(x_v)dv \right) du \\ &= x_{t_0} + \int_{t_0}^t b_{t_0}(x_{t_0})du + Lb_{t_0}(x_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u dudv + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u \int_{t_0}^v L^2b_w(x_w)dudv dw \\ &= x_{t_0} + (t - t_0)b_{t_0}(x_{t_0}) + \frac{(t - t_0)^2}{2}Lb_{t_0}(x_{t_0}) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^u \int_{t_0}^v L^2b_w(x_w)dudv dw \end{aligned} \quad (5.18)$$

formule que l'on peut continuer à itérer. De même, qu'on vient d'exploiter la relation $\frac{d}{dt}x_t = b_t(x_t)$, la relation $\frac{d}{dt}f_t(x_t) = Lf_t(x_t)$ conduira à un développement de la forme

$$f(x_t) = \sum_{k=0}^r \frac{(t - t_0)^k}{k!} L^k f_{t_0}(x_{t_0}) + \int_0^t \dots \int_0^{u_{k+1}} L^{k+1} f(x_{u_k}) du_1 \dots du_{k+1}. \quad (5.19)$$

Cas stochastique

Les formules d'**Itô-Taylor** découlent de la formule d'Itô qui à partir de l'expression

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t b_u(X_u)du + \int_{t_0}^t \sigma_u(X_u)dB_u \quad (5.20)$$

conduit à

$$\begin{aligned} f_t(X_t) &= f_{t_0}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t [f_u^t(X_u) + b_u(X_u)f_u^x(X_u) + \frac{1}{2}f_u^{xx}(X_u)\sigma_u(X_u)]du + \int_{t_0}^t \sigma_u(X_u)f_u^x(X_u)dB_u \\ &= f_{t_0}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L_0f_u(X_u)du + \int_{t_0}^t L_1f_u(X_u)dB_u. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Comme dans le cas déterministe, on peut exploiter ces formules pour obtenir un développement de X_t :

$$\begin{aligned} X_t = X_{t_0} &+ \int_{t_0}^t [b_{t_0}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^u L_0b_v(X_v)dv + \int_{t_0}^u L_1b_v(X_v)dB_v]du \\ &+ \int_{t_0}^t [\sigma_{t_0}(X_{t_0}) + \int_{t_0}^u L_0\sigma_v(X_v)dv + \int_{t_0}^u L_1\sigma_v(X_v)dB_v]dB_u. \end{aligned} \quad (5.22)$$

On peut itérer ces formules pour obtenir, en laissant de coté le reste intégrale, des approximations d'ordre élevé.

5.4.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 1,5

Un inconvénient des méthodes de Taylor et qu'elles mettent en oeuvre des dérivées des termes de dérive et de diffusion b_t et σ_t . En fait, il existe des méthodes de type Runge-Kutta, qui ne nécessitent pas d'effectuer de telles dérivations. Indiquons ici sans justification la forme de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1,5 :

$$\boxed{X_{t+h} = X_t + b_t(X_t)h + \sigma_t(X_t)\Delta B_t + \frac{1}{2}(\sigma_t(X_t') - \sigma_t(X_t))\frac{[(\Delta B_t)^2 - h]}{\sqrt{h}}} \quad (5.23)$$

avec

$$\boxed{X_t' = X_t + b_t(X_t)h + \sigma_t(X_t)\sqrt{h}.} \quad (5.24)$$

On pourra trouver d'autres méthodes d'ordres plus élevés dans [6].

5.5 Exemples

Considérons l'équation

$$dX_t = \frac{1}{3}X_t^{1/3}dt + X_t^{2/3}dB_t, \quad (5.25)$$

avec X_0 fixé. Pour l'intégrer on applique la formule d'Itô à la transformation $Y_t = g(X_t) = X_t^a$:

$$\begin{aligned} dY_t &= aX_t^{a-1}dX_t + \frac{1}{2}a(a-1)X_t^{a-2}(dX_t)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}aX_t^{a-1+1/3} + \frac{1}{2}a(a-1)X_t^{a-2+4/3}\right)dt + aX_t^{a-1+2/3}dB_t. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Pour $a = 1/3$, on obtient simplement

$$dX_t^{1/3} = \frac{1}{3}dB_t \quad (5.27)$$

et donc

$$X_t = \left(X_0^{1/3} + \frac{1}{3}B_t\right)^3. \quad (5.28)$$

La figure 5.1 montre un exemple de trajectoire obtenu par simulation de B ainsi que les approximations numériques d'Euler, de Milstein et de Runke-Kutta d'ordre 1.5. On observe pour cette trajectoire que les méthodes d'Euler et de Milstein conduisent ici à des performances moins bonnes que la méthode de Runke-Kutta qui suit bien la trajectoire réelle. L'exemple de la figure 5.2, illustre également l'intérêt de méthodes d'ordres plus élevés que celui de la méthode d'Euler. Ces comparaisons seront approfondies sur ce dernier exemple dans le cadre de la séance de travaux pratiques (décrite au chapitre VII).

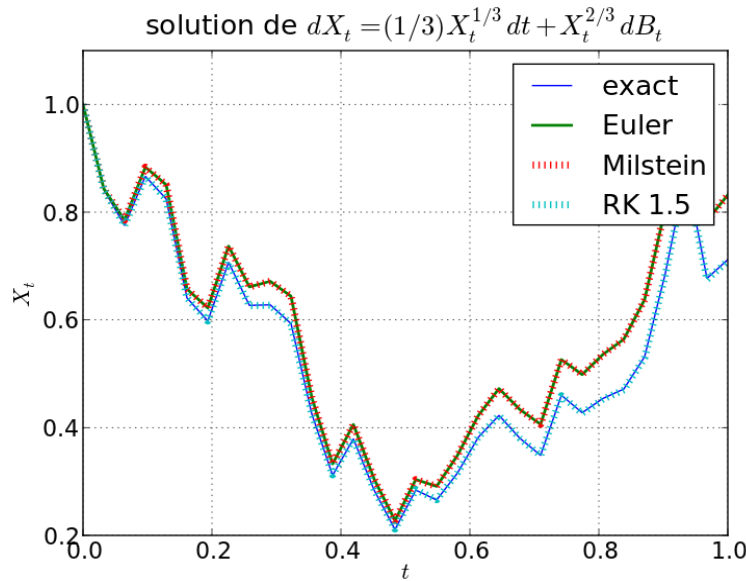
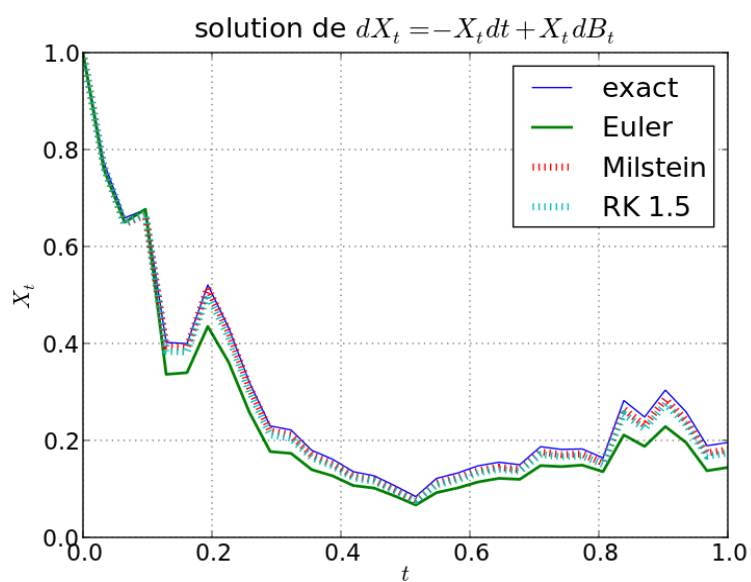


FIGURE 5.1 – Méthodes d'Euler, Milstein et RK 1,5 pour $dX_t = \frac{1}{3}X_t^{1/3}dt + X_t^{2/3}dB_t$.

FIGURE 5.2 – Méthodes d'Euler, Milstein et RK 1,5 pour $dX_t = -X_t dt + X_t dB_t$.

Chapitre 6

Exercices

Dans les exercices B désigne un mouvement brownien standard.

1) Trouvez l'EDS satisfaite par $X_t = e^{Bt}$.

2) vérifiez que $X_t = a^{-1}B_{a^2t}$ ($a \neq 0$) est un mouvement brownien standard.

3) Si B_1, \dots, B_n sont des mouvements browniens indépendants, indiquez l'EDS dont le processus $X_t = \sqrt{B_{1,t}^2 + \dots + B_{n,t}^2}$ est la solution.

4) Résolvez $dX_t = X_t dt + e^{-t} dB_t$ avec $X_0 = x$.

5) En utilisant la formule d'Itô vectorielle calculez $d(X_t Y_t)$, où X et Y sont des processus d'Itô définis à partir du même mouvement brownien.

6) Pour intégrer l'équation

$$dX_t = f_t(X_t)dt + c_t X_t dB_t, \quad (6.1)$$

avec $X_0 = x$ et c_t une fonction déterministe continue, on multiplie chaque terme par la fonction

$$F_t = \exp\left(-\int_0^t c_u dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t c_u^2 du\right). \quad (6.2)$$

On pose $Y_t = F_t X_t$. Exprimez l'EDS satisfaite par Y_t . En adoptant cette approche, intégrez l'équation

$$dX_t = X_t^{-1} dt + \alpha X_t dB_t. \quad (6.3)$$

7) Intégrez l'équation

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t} dt + dB_t \quad (6.4)$$

avec $Y_0 = a$ et $0 \leq t < 1$ (Indication : divisez les deux membres par $1-t$). Vérifiez que Y_t est un pont brownien sur $[0, 1]$ dont on précisera les paramètres.

8) Donnez l'expression du courant dans un circuit RLC série lorsqu'on place à ses bornes une source de tension variable donnée f_t que l'on suppose perturbée par un bruit de la forme αB_t .

9) Résoudre

$$dX_t = \lambda(b - \log X_t)X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (6.5)$$

avec $X_0 > 0$ fixé, en considérant la transformation $Y_t = \log X_t$.

Chapitre 7

Travaux pratiques

On va étudier l'EDS (5.8), donnée par

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t \quad (7.1)$$

avec X_0 indépendant de B , dont on a vu que la solution s'écrit

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha B_t \right). \quad (7.2)$$

1) On fait l'étude sur $[0, 1]$ par la méthode d'Euler pour $r = -1$, $\alpha = 1$ et $X_0 = 1$. Tracez, pour une trajectoire de B les trajectoires fournies par la méthode d'Euler pour un pas de la forme $h = 2^{-k}$ avec les valeurs $k = 2, 4, 6, 8$. Pour $k = 2, 4, 6$ on interpolera linéairement la trajectoire entre les points calculés. Pour $k = 4$ et $k = 6$, tracez également une trajectoire interpolée au moyen d'un pont brownien. On prendra $X_0 = 1$ et on fera les tracés avec 256 points sur l'intervalle $[0, 1]$.

2) En appliquant la formule d'Itô à $Y_t = e^{\alpha B_t}$, montrez que $\mathbb{E}[Y_t] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$ (indication : vérifiez que $\mathbb{E}[\int_0^u f_t dB_t] = 0$ pour $f \in \mathcal{V}$ et donc $\mathbb{E}[\int_0^u e^{\alpha B_u} dB_u] = 0$). En déduire que si X_0 est indépendant de B alors $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]e^{rt}$. Pour vérifier ce résultat, moyennerez un grand nombre de trajectoires et comparez graphiquement la trajectoire moyenne à la fonction $\mathbb{E}[X_t]$ calculée analytiquement.

3) En faisant varier α , observez le comportement asymptotique des trajectoires en fonction de la valeur de $r - \frac{1}{2}\alpha^2$.

4) Vérifiez l'ordre de la méthode d'Euler sur cet exemple. Pour cela, on tracera la courbe d'erreur moyenne absolue $E_{T,h}$ en fonction de h , avec $T = 1$. Testez également les méthodes de Milstein et de Runge-Kutta et vérifiez qu'elles sont bien d'ordres respectifs 1 et 1,5.

Annexe A

Mesures aléatoires

A.1 Définition

Une fonction Z définie sur la tribu des boréliens, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, dP)$ est appelée mesure aléatoire si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \quad Z(\cup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} Z(\Delta_n), \text{ si } \Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset \text{ pour } m \neq n \\ \forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{E}[Z(\Delta_1)Z(\Delta_2)^*] &= 0, \text{ si } \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Il est clair que $Z(\emptyset) = 0$.

A.2 Mesure positive μ_Z associée à Z .

On définit sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la mesure positive μ_Z associée à la mesure aléatoire Z par

$$\mu_Z(\Delta) = \| Z(\Delta) \|^2. \tag{A.2}$$

La propriété de σ -additivité sur μ_Z provient directement du fait que si $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$ pour $m \neq n$,

$$\begin{aligned} \mu_Z(\cup_n \Delta_n) &= \mathbb{E}[|Z(\cup_n \Delta_n)|^2] \\ &= \mathbb{E}[\sum_{m,n} Z(\Delta_m)Z^*(\Delta_n)] \\ &= \mathbb{E}[\sum_n |Z(\Delta_n)|^2] \\ &= \sum_n \mu_Z(\Delta_n). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Quand à la positivité de μ_Z , elle est immédiate.

On utilise souvent les notations différentielles

$$\begin{aligned} Z(dt) &= Z([t, t + dt]) \\ \text{et } \mu_Z(dt) &= \| Z(dt) \|^2. \end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2.1 Intégrale stochastique $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)Z(dt)$.

On va commencer par définir l'intégrale stochastique pour les fonctions mesurables étagées à support compact, avant d'étendre la définition à une classe plus large de fonctions.

Une fonction mesurable étagée à support compact est une fonction ϕ dont le support est un ensemble compact K et pour laquelle il existe une partition $(\Delta_k)_{k=1,p}$ de K , avec $\Delta_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$, tels que $\phi(t) = \sum_{k=1,p} a_k \mathbb{I}_{\Delta_k}(t)$.

Notons E l'algèbre des fonctions étagées à support compact, et considérons l'application

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, dP) \\ \sum_{k=1,p} a_k \mathbb{I}_{\Delta_k}(t) &\rightarrow \sum_{k=1,p} a_k Z(\Delta_k). \end{aligned} \tag{A.5}$$

On notera

$$\sum_{k=1,p} a_k Z(\Delta_k) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)Z(dt). \tag{A.6}$$

Il est clair que T définit un homomorphisme de $E \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\mu_Z)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, dP)$ puisque pour $\phi_k(t) = \sum_{l=1,n_k} a_l^k \mathbb{I}_{\Delta_l^k}(t)$ ($k = 1, 2$),

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \phi_2 \rangle &= \int \sum_{k,l} a_k^1 a_l^{2*} \mathbb{I}_{\Delta_k \cap \Delta_l}(t) d\mu_Z(t) \\ &= \sum_{k,l} a_k^1 a_l^{2*} \mu_Z(\Delta_k \cap \Delta_l) \\ &= \sum_{k,l} a_k^1 a_l^{2*} \| Z(\Delta_k \cap \Delta_l) \|^2 \\ &= \langle \sum_k a_k^1 Z(\Delta_k), \sum_l a_l^2 Z(\Delta_l) \rangle \\ &= \langle T(\phi_1), T(\phi_2) \rangle. \end{aligned} \tag{A.7}$$

De plus, E est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\mu_Z)$ et T est continue. Donc, d'après le théorème de prolongement par continuité d'un opérateur linéaire borné, présenté dans la section suivante (voir aussi [10]), T est prolongeable en un homomorphisme de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\mu_Z)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, dP)$.

Plus précisément, pour $\phi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\mu_Z)$, il existe une suite de fonctions $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E qui converge vers ϕ , et on définit

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)Z(dt) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)Z(dt). \tag{A.8}$$

De plus, la propriété de conservation de la norme s'exprime par

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \phi(f) dZ(f) \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)|^2 \mu_Z(dt). \quad (\text{A.9})$$

On a donc défini les intégrales stochastiques associées à une mesure aléatoire Z , et on a vérifié que l'intégration stochastique établit un homomorphisme de $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\mu_Z)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, dP)$ pour les produits scalaires définis sur ces espaces.

A.3 Prolongement par continuité d'un opérateur linéaire [10].

Le résultat technique général suivant intervient dans la justification l'existence de l'intégrale stochastique discutée dans la section précédente.

Théorème 14 (prolongement par continuité d'un opérateur) *Soit $T : D \rightarrow B$ un opérateur linéaire borné, où D est un sous ensemble dense d'un espace normé A , et B un espace de Banach (espace vectoriel normé complet). Il existe un opérateur linéaire borné \tilde{T} défini sur A et tel que $\forall x \in D, \tilde{T}x = Tx$, et $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Démonstration. Pour $x \in D$, on pose $\tilde{T}x = Tx$. Pour $x \in A$, mais $x \notin D$, on pose $\tilde{T}x = \lim_n Tx_n$, où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D qui converge vers x .

La limite de la suite $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe bien car $\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \times \|x_n - x_m\|$, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc la suite $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi; mais comme B est complet, la suite $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

De plus, la limite de la suite $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x choisie. En effet, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x , les limites a et a' de Tx_n et Tx'_n vérifient :

$$\|a - a'\| \leq \|a - Tx_n\| + \|T\| \times (\|x_n - x\| + \|x - x'_n\|) + \|Tx'_n - a'\| \quad (\text{A.10})$$

et les termes de droite convergent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Donc $a = a'$.

Pour montrer que $\|T\| = \|\tilde{T}\|$, remarquons que $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|^{-1} \leq \|T\|$, et donc $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. On a de plus

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{x \in A, \|x\|=1} \|\tilde{T}(x)\| \geq \sup_{x \in D, \|x\|=1} \|\tilde{T}(x)\| = \|T\|. \quad (\text{A.11})$$

Donc $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. \square

Remarquons de plus que si T conserve la norme, il en est de même de \tilde{T} . En effet, $\forall x \in A$, x est la limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D et d'après la continuité de la norme,

$$\|\tilde{T}(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{T}(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|. \quad (\text{A.12})$$

Bibliographie

- [1] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968.
- [2] T. Chonavel, *Statistical Signal Processing*, Springer, 2002.
- [3] T. Chonavel, *Notes de cours d'analyse numérique et optimisation continue*, polycopié Télécom Bretagne, 2011.
- [4] T. Comets et T. Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffusion*, Dunod 2006.
- [5] D. Foata et A. Fuchs, *Processus stochastiques*, Dunod 2004.
- [6] P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, *Numerical solution of SDE through computer experiments*, Springer, 2003.
- [7] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer, 2000.
- [8] B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis, *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, Springer, 1998.
- [9] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, 2005.
- [10] V. Trenoguine, *Analyse fonctionnelle*, éditions Mir, Moscou, trad. française, 1985.

Index

- processus de Wiener, 8
- calcul d'Itô, 4
- convergence
 - forte, 28
- drift, 21
- equation
 - de Langevin, 24
- erreur absolue, 26
- erreur moyenne absolue, 28
- espérance conditionnelle, 6
- espaces de Hilbert, 12
- famille
 - cohérente, 7
- filtration, 13
 - canonique, 13
- fonction
 - étagée, 37
 - élémentaire, 17
 - de dérive, 21
 - de diffusion, 21
- formule
 - d'Itô, 21
 - d'Itô vectorielle, 23
 - d'Itô-Taylor, 30
 - de parseval, 12
 - de Taylor, 29
- inégalité
 - de Doob, 14
- intégrale
 - d'Itô, 17
 - de Stratonovich, 17
 - stochastique, 37
- interpolation, 27
- isométrie
 - d'Itô, 18, 19
- méthode
 - d'Euler, 26, 27
 - de Milstein, 26, 28
 - de Runge-Kutta, 26
 - du point milieu, 11
- martingales, 13
- modèle
 - de Black-Scholes, 23
- modification d'un processus, 9
- mouvement brownien, 8
 - géométrique, 24
 - standard, 8
- ordre d'une méthode, 26, 28
- processus
 - élémentaire, 17
 - adapté, 13
 - d'Itô, 21
 - d'Ornstein-Uhlenbeck, 24
- prolongement d'un opérateur, 38
- solution
 - faible, 25
 - forte, 25
- théorème
 - de cohérence de Kolmogorov, 7
 - de continuité de Kolmogorov, 9
 - de Donsker, 11
 - de Doob, 14, 19
 - de Kolmogorov, 7
- tribu
 - borélienne, 6
 - engendrée par des ensembles, 6
 - engendrée par des variables, 6